

## Илтгэгч функцийн интеграл

### 0.1 $e^x$ функцийн интеграл

**Тодорхойлолт 0.1**  $f(x)$  функцийн бүх эх функцийн олонлог  $F(x) + C$ -ийг түүний *тодорхойгүй интеграл* гээд

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (1.1)$$

гэж тэмдэглэнэ.

*∫ тэмдэглэгээг математикт анх XVII зууны сүүлд Германы математикч Готфрид Лейбниц оруулж ирсэн бөгөөд энэ тэмдэглэгээ нь S үсгээс үүдэлтэй юм (Латинаар Summa – нийлбэр гэдэг үгийн эхний үсэг).*

Уламжлал ба интеграл нь харилцан урвуу үйлдэл тул

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

чанар биелнэ.

$y = e^x$  Функцийн уламжлал  $\frac{d}{dx}e^x = e^x$  гэдгээс  $\int e^x dx = e^x + C$  болно.

Уламжлалын чанар ёсоор

$$\frac{d}{dx}(c \cdot e^x) = c \cdot e^x \quad \text{ба} \quad \frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = a \cdot e^{ax+b}$$

тул интеграл нь

$$\int c \cdot e^x dx = c \cdot e^x + C \quad \text{ба} \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$$

болно.

**Жишээ 0.1**  $\int 2e^x dx$  интегралыг бод.

**Бодолт:**  $\int 2e^x dx = 2e^x + C$

**Жишээ 0.2**  $\int (x - 3e^{5x})dx$ -г ол.

**Бодолт:**  $\int (x - 3e^{5x})dx = \int x dx - 3 \int e^{5x} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{3}{5}e^{5x} + C, \quad C \in R$

**Жишээ 0.3**  $\int 4e^{2-3x} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт:**  $\int 4e^{2-3x} dx = 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{2-3x} + C = -\frac{4}{3} \cdot e^{(2-3x)} + C$  болно.

**Жишээ 0.4**  $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт:** Эхлээд интегралын доорх функцийн хүртвэрийг хуваарьд гишүүнчлэн хувааж гарсан функцийг интегралчилна.

$$\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx = \int \left( \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right) dx = \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + C$$

## Дасгал бодлого

1.  $x$  хувьсагчаар интегралчилж бод.

a.  $e^{4x}$

b.  $e^{5x-2}$

c.  $7e^{-3x}$

d.  $e^3 + \frac{x}{2}$

e.  $e^{9-2x}$

f.  $\frac{1}{3}e \cdot e^{2x-7}$

g.  $e^{2x} + \frac{3}{e^{4x}}$

h.  $4e^x - \frac{9}{e^{2x}}$

2. Бие дааж бодох дасгал

1. $\int e^{2x} dx =$	2. $\int e^{x+1} dx =$
3. $\int e^{3x+2} dx =$	4. $\int (e^x - 3) dx =$
5. $\int (e^x + 2x) dx =$	6. $\int (e^x - x) dx =$
7. $\int (1 - e^x) dx =$	8. $\int \frac{1}{2x} dx =$

## 0.2 $\frac{1}{x}$ функцийн интеграл

$y = \ln x$  Функцийн уламжлал  $x > 0$  үед

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \text{ тул } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

болно.

Харин  $x < 0$  үед  $y = \ln x$  функц тодорхойлогдохгүй боловч  $x < 0$  буюу  $-x > 0$  үед  $\int \frac{1}{-x} dx = \ln -x + C$  байх тул  $x < 0$  үед  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + C$  болно.

Энэ хоёр үр дүнг нэгтгэн бичвэл

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \quad (1)$$

болно.

Үүнтэй адилаар  $y = \ln(ax + b)$  Функцийн уламжлал

$$\frac{d}{dx} \ln(ax + b) = \frac{a}{ax + b} \text{ тул}$$

интеграл нь

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C \quad (2)$$

болно.

**Жишээ 0.5**  $\int \frac{1}{7x - 3} dx$  интегралыг бод.

**Бодолт:**  $\int \frac{1}{7x - 3} dx = \frac{1}{7} \ln |7x - 3| + C$

**Жишээ 0.6**  $\int \left( \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x} \right) dx$  интегралыг бод.

**Бодолт:** Интегралын доорх функц нь зөв биш рационал бутархай функц учир хүртвэрийг хуваарьд хувааж, бүхэл хэсгийг нь олж гурван функцийн нийлбэр болгоно. Интегралын чанар ашиглан нийлбэрийн интегралыг олно.

$$\int \left( \frac{2x^3 - 3x^2 + 7}{x} \right) dx = \int \left( \frac{2x^3}{x} - \frac{3x^2}{x} + \frac{7}{x} \right) dx = \int \left( 2x^2 - 3x + \frac{7}{x} \right) dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 7 \ln |x| + C.$$

**Дасгал бодлого**

1. Дараах интегралыг бод.

a.  $\int \frac{1}{2x} dx$

b.  $\int \frac{2}{x} dx$

c.  $\int \frac{1}{2x+1} dx$

d.  $\int \frac{2}{3x-2} dx$

e.  $\int \left( \frac{1}{3x-2} - \frac{2}{5-4x} \right) dx$

f.  $\int \frac{3}{4x} dx$

g.  $\int \frac{3}{5-2x} dx$

h.  $\int \left( \frac{4}{(x-2)^3} + \frac{3}{2x+1} \right) dx$

i.  $\int \left( \frac{1}{5x^2} - \frac{2}{1-x} \right) dx$

2. Интегралыг бод.

a.  $\int ((x-1)^2 + 3e^{1-2x}) dx$

b.  $\int \frac{e^{2x} + e^x - 7}{e^x} dx$

c.  $\int \left( \frac{2}{x} + 3e^x \right) dx$

3. Бие дааж бодох дасгал

9. $\int \frac{1}{nx} dx =$	10. $\int \frac{1}{x+2} dx =$
11. $\int \frac{1}{3x+4} dx =$	12. $\int \frac{2}{10x+3} dx =$
13. $\int \frac{c}{ax+b} dx =$	14. $\int \frac{1}{cx-d} dx =$